11/10/2016

Θεωρία Αυτομάτων και Τυπικών Γλωσσών

Βιβλίο: Εισαγωγή στη θεωρία Υπολογισμού (κατά προτίμηση)

Ο υπολογιστής "θυμάται" τα σήματα που του δίνονται ανά πάσα στιγμή.

Έχουμε τις καταστάσεις k_0, k_1, k_2, k_3

Με ένα σήμα a πάμε από το k_0 στο k_1

-//- -//- b -//- -//- k_1 στο k_2

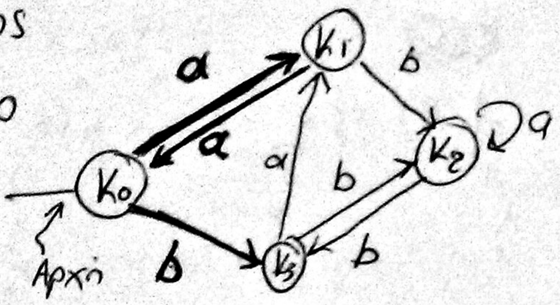
~~-//- -//- c~~ ... (παριστάνεται στο παρακάτω σχήμα αναλυτικά)

Αποδέκτης

Πεπερασμένο

Αυτόματο

Αιτιοκρατικό



ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ (ΓΡΑΦΗΜΑ)

Σε όλες τις καταστάσεις έχουμε σήματα a, b

η σειρά aab για να πάμε από το k_0 στο k_3 είναι αποδεκτή αφού (με έντονα γράμματα στο σχήμα)

ενώ η σειρά $aabb$ δεν είναι αποδεκτή

ΑΙΤΙΟΚΡΑΤΙΚΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΑΥΤΟΜΑΤΟ (ΑΠΑ)

Τα αυτόματα είναι πάντα αιτιοκρατικά

$M = (K, \Sigma, \mu, k_0, T)$

$K = \{k_0, k_1, k_2, k_3\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$k_0 \in K$

$T = \{k_3\} \subseteq K$

K	μ(k,a)	μ(k,b)
k_0	k_1	k_3
k_1	k_0	k_2
k_2	k_2	k_3
k_3	k_1	k_2

μ: η $\mu(k,a)$ είναι συνάρτηση που οδηγεί από το k με σήμα a κάπου

Για παράδειγμα (στον πίνακα) από το k_0 με a πάει στο k_1 ενώ από το k_0 με b πάει στο k_3

$\hat{\mu}: K \times \Sigma^* \to K$

$\hat{\mu}(k, \varepsilon) = k$ ①

$\hat{\mu}(k, xa) = \mu(\hat{\mu}(k, x), a)$ ②

$x \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$

(Όπως από τα γράμματα του (ελληνικού) αλφαβήτου μπορούν να προκύψουν άπειρες αλλαγές λέξεων, εμείς κρατάμε εκείνες τις αλλαγές που σχηματίζουν λέξεις, που έχουν νόημα δηλαδή. Έτσι και το Σ^* περιλαμβάνει εκείνες τις αλλαγές που έχουν νόημα για το σύστημά μας)

(ΜΑΠΑ: Μη αιτιοκρατικό πεπερασμένο αυτόματο)

$\Sigma^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \ldots$
$b, bb, bbb, \ldots$
$ab, \ldots \}$

όλων συνδυασμών
Το σύνολο των αλλαγών ~~από το αλφάβητο~~

(Πρέπει να ισχύουν οι 2 προϋποθέσεις στα αριστερά για να είναι αποδεκτοί οι συνδυασμοί)

$\Lambda(M) = \{x : x \in \Sigma^* \;\&\; \hat{\mu}(k_0, x) \in T\}$

Η Γλώσσα που καταλαβαίνει το σύστημα

Από όλα τα x που ανήκουν στο Σ^*

οι συνδυασμοί εκείνοι που βγάζουν νόημα

Τονίζουμε ότι η συνάρτηση μετάβασης σε ένα ΑΠΑ είναι μια ολική συνάρτηση

Δηλαδή η τιμή του $\mu(k, a)$ είναι ορισμένη για κάθε $k \in K$ και $a \in \Sigma$

Αυτό σημαίνει ότι από μια κατάσταση με ένα συγκεκριμένο γράμμα, μπορεί να πάει σε μία μόνο κατάσταση

Αντίθετα με το ΑΠΑ, το ΜΑΠΑ έχει ως συνάρτηση μετάβασης, δεν είναι ολική αλλά μερική, δηλαδή έχει ως τιμή της έχει όχι μια κατάσταση αλλά ένα σύνολο καταστάσεων. Με άλλα λόγια την ώρα που θα γίνει μετάβαση επιλέγεται η κατάσταση από ένα σύνολο καταστάσεων. Αυτή η ιδιότητα του ΜΑΠΑ το καθιστά μη προγραμματίσιμο και επιβάλλει τη μετατροπή του σε αντίστοιχο ΑΠΑ όπως θα δούμε σε παρακάτω μαθήματα

Ορισμός:

Ένα μη αιτιοκρατικό πεπερασμένο αυτόματο (ΜΑΠΑ) είναι ένα σύστημα μ όπου το σύνολο Κ είναι διάφορο του κενού, το Σ είναι πεπερασμένο αλφάβητο εισόδου.

$$\psi\ (K \times \Sigma) \rightarrow 2^K$$

Η τιμή της συνάρτησης $\mu(\kappa, a) = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ θα μπορούσε να είναι το κενό ~~όπως και στο ΑΠΑ για τιμή της συνάρτησης~~

$$\hat{\mu}(\kappa, \varepsilon) = \{\kappa\}$$

$$\hat{\mu}(\kappa, xa) = \bigcup_{p \in \hat{\mu}(\kappa, x)} \mu(p, a)$$

$$\Lambda(\mu) = \{ x \mid x \in \Sigma^* \ \&\ \hat{\mu}(\kappa_0, x) \cap T \neq \emptyset$$

$$\bar{\mu} : 2^K \times \Sigma^* \rightarrow 2^K$$

$$\bar{\mu}(\{p_1, p_2, \dots p_k\}, x) = \bigcup_{i=1}^{k} \hat{\mu}(p_i, x)$$

$\psi, \hat{\mu}, \bar{\mu}$ ⟶ μ (στη βιβλιογραφία δ)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

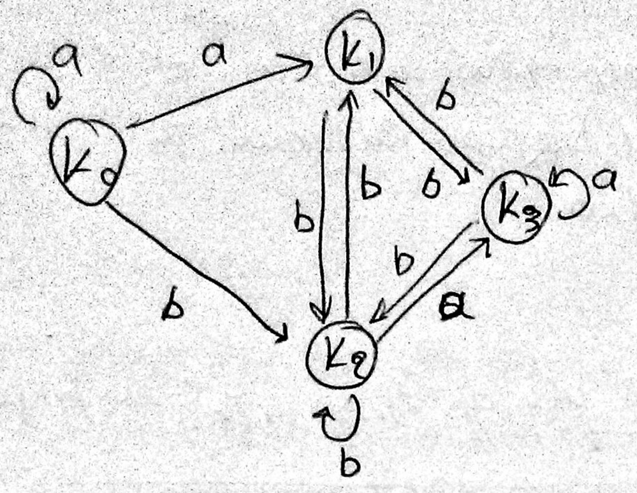
K	$\mu(\kappa, a)$	$\mu(\kappa, b)$
κ_0	$\{\kappa_0, \kappa_1\}$	$\{\kappa_0\}$
κ_1	$\emptyset$	$\{\kappa_2, \kappa_3\}$
κ_2	$\{\kappa_3\}$	$\{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\}$
κ_3	$\{\kappa_3\}$	$\{\kappa_1\}$

Εκφώνηση: Να περιγραφεί το αυτόματο του οποίου η συνάρτηση μετάβασης δίνεται από τον πίνακα και να γίνει το καταστατικό διάγραμμα και να εξηγήσετε τι είδους αυτόματο είναι και γιατί.

$$M = (K, \Sigma, \mu, \kappa_0, T)$$

$$K = \{\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$



Είναι μη αιτιοκρατικό γιατί έχουμε για τιμή ένα σύνολο καταστάσεων σε κάποιες περιπτώσεις και σε μία περίπτωση η τιμή είναι το κενό.

Η έννοια του σχηματισμού και της σχέσης αυτής εισάγεται για τα ΜΑΠΑ και με τον ίδιο ακριβώς τρόπο εισάγεται και για τα ΑΠΑ.
Ο μη αιτιοκρατικός χαρακτήρας του Αυτομάτου εκδηλώνεται όταν επιχειρείται η παρακολούθηση της αποδοχής μιας ακολουθίας. Στα ΑΠΑ η διαδικασία είναι γραμμική ενώ στα ΜΑΠΑ παράγεται μία δενδροειδής ακολουθία σχηματισμών η οποία και ορίζει τον δέντρο αποδοχής μιας λέξης.

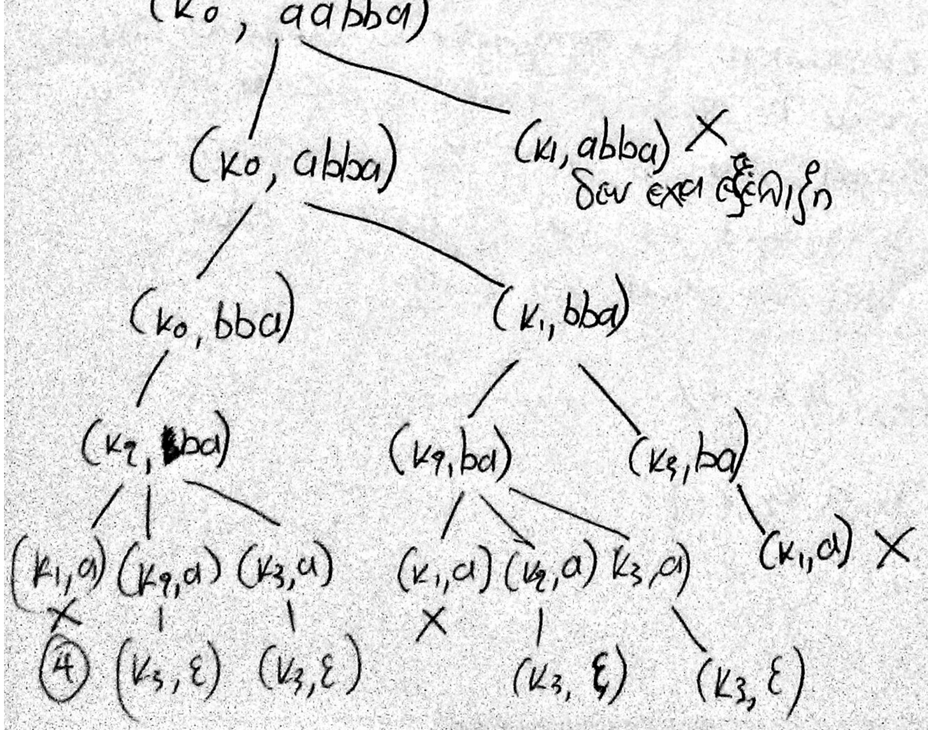
Με τους σχηματισμούς περιγράψαμε τις αποδοχές των λέξεων

$(\kappa_0, aabba)$

↑

βρισκόμαστε στη κατάσταση κ_0.

ΜΑΠΑ (ΔΕΝΤΡΟ ΑΠΟΔΟΧΗΣ ΛΕΞΗΣ)



ΑΠΑ ΑΠΟΔΟΧΗ ΛΕΞΗΣ

$(k_0, ab\,ab) \vdash (k_1, bab)$

$\vdash (k_q, a, b)$

$\vdash (k_q, b)$

$\vdash (k_3, \varepsilon)$

ΘΕΩΡΗΜΑ : Δίνεται ένα ΜΑΠΑ που αποδέχεται τουλάχιστον ένα σύνολο L. Τότε υπάρχει ένα ΑΠΑ το οποίο δέχεται το σύνολο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:
Να βρεθεί ένα ΑΠΑ το οποίο αποδέχεται το ίδιο σύνολο που αποδέχεται το ΜΑΠΑ που μόλις είδαμε (προηγούμενο παράδειγμα)

K	$\mu(K, a)$	$\mu(K, b)$
k_0	$\{k_q, k_1\}$	$\{k_q\}$
k_1	$\emptyset$	$\{k_q, k_3\}$
k_q	$\{k_3\}$	$\{k_1, k_q, k_3\}$
k_3	$\{k_3\}$	$\{k_1\}$

Έχουμε το $M(K, \Sigma, \mu, k_0, T)$

ψάχνουμε ένα $M'(K', \Sigma, \mu', k_0', T')$

$\mu'([k_0], a)$

$\mu(\{k_0\}, a) = \{k_0, k_1\}$

$\mu'([k_0, k_1], b)$

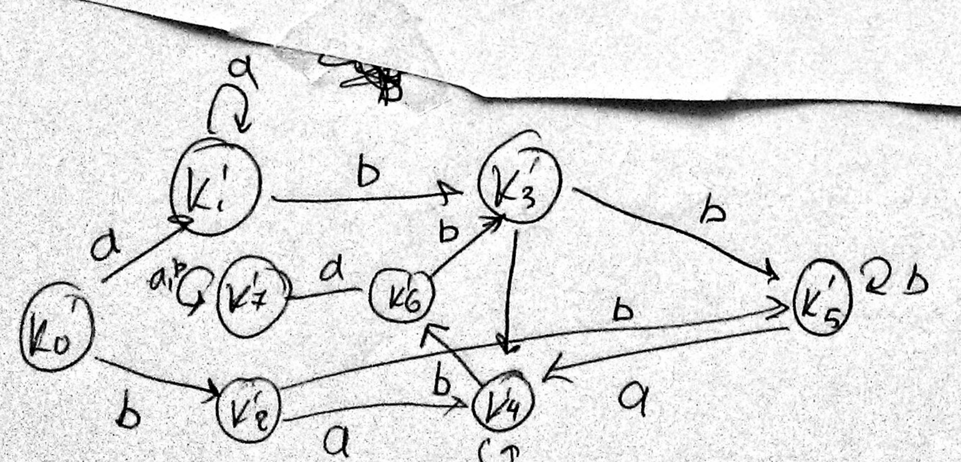
$\mu(\{k_0, k_1\}, b) = \mu(\{k_0\}, b) \cup \mu(k_1, b) = \{k_q\} \cup \{k_q, k_3\} = \{k_q, k_3\}$

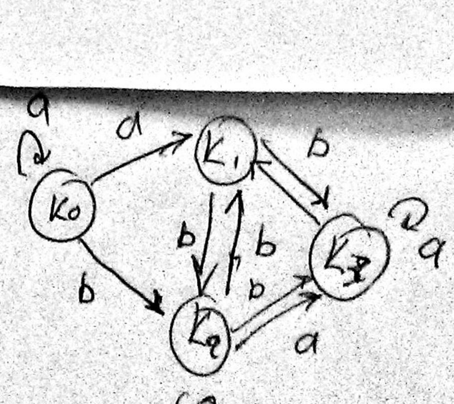
$\mu'([k_0, k_1], b) = [k_q, k_3]$

	K'	$\mu'(K',a)$	$\mu'(K',b)$
K'_0	$[K_0]$	$[K_0, K_1]$	$[K_2]$
K'_1	$[K_0, K_1]$	$[K_0, K_1]$	$[K_2, K_3]$
K'_2	$[K_2]$	$[K_3]$	$[K_1, K_2, K_3]$
K'_3	$[K_2, K_3]$	$[K_2]$	$[K_1, K_2, K_3]$
K'_4	$[K_3]$	$[K_3]$	$[K_1]$
K'_5	$[K_1, K_2, K_3]$	$[K_3]$	$[K_1, K_2, K_3]$
K'_6	$[K_1]$	K'_7	$[K_2, K_3]$
K'_7		K'_7	K'_7 ← μια κατάσταση νεκρή.

ολική συνάρτηση (πρέπει όλα να πηγαίνουν σε όλα)

άρα





(Μας δόθηκε)